



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Sean los puntos $p_0 = (0, 1)$, $p_1 = (1, 2)$, $p_2 = (-1, 1)$ en una referencia afín. Determine las coordenadas baricéntricas $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ de un punto (x, y) respecto a esta referencia.

Solución: Los vectores p_0p_1 y p_0p_2 son

$$p_0p_1 = (1, 1), \quad p_0p_2 = (-1, 0).$$

Son una base de $\mathbb{R}^2$. Las coordenadas baricéntricas de un punto (x, y) son

$$\begin{aligned}(x, y) &= \lambda_0(0, 1) + \lambda_1(1, 2) + \lambda_2(-1, 1), \\ 1 &= \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}(x, y) &= \lambda_0(0, 1) + \lambda_1(1, 2) + (1 - \lambda_0 - \lambda_1)(-1, 1) \\ &= (\lambda_0 + 2\lambda_1 - 1, \lambda_1 + 1).\end{aligned}$$

Por eso:

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda_0 + 2\lambda_1 - 1, \\ y &= \lambda_1 + 1, \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} \lambda_1 &= y - 1, \\ \lambda_0 &= x - 2\lambda_1 + 1 = x - 2y + 3. \end{aligned} \right\}$$

Estas son las coordenadas baricéntricas.

2. (1 PUNTO) Defina envolvente de una familia de curvas planas.

Solución: Una curva es envolvente de una familia de curvas cuando en cada punto es tangente a alguna curva de la familia y además, no está incluida en la familia de curvas (o en cada punto es tangente a alguna curva de la familia de tal forma que cada curva de la familia es tangente a la envolvente)

3. (1 PUNTO) Sea C la hélice dada, para las constantes $a, b \in \mathbb{R}$, por la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

Se pide determinar el vector tangente unitario a esta curva en un punto genérico $\mathbf{x}(t_0)$.

Solución: Tenemos que calcular

$$\mathbf{x}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b).$$

Su módulo es

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

y entonces

$$\mathbf{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t, a \cos t, b).$$

4. (1 PUNTO) Determine la torsión de la siguiente curva $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}(t) = (t, 2t^2, t^2)$.

Solución: Como no está parametrizada por el arco, utilizamos

$$\tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Tenemos

$$\mathbf{x}'(t) = (1, 4t, 2t), \quad \mathbf{x}''(t) = (0, 4, 2), \quad \mathbf{x}'''(t) = (0, 0, 0).$$

Por eso, y el vector normal principal es

$$\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t)) = 0$$

y la curva es plana.

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Calcúlese la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(2, 5)$.

Solución: El polígono es

$$\mathbf{b}_0 = (-1, 2), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 1), \quad \mathbf{b}_2 = (1, 1), \quad \mathbf{b}_3 = (1, -1), \quad \mathbf{b}_4 = (2, 5).$$

Entonces la curva de Bézier cumple

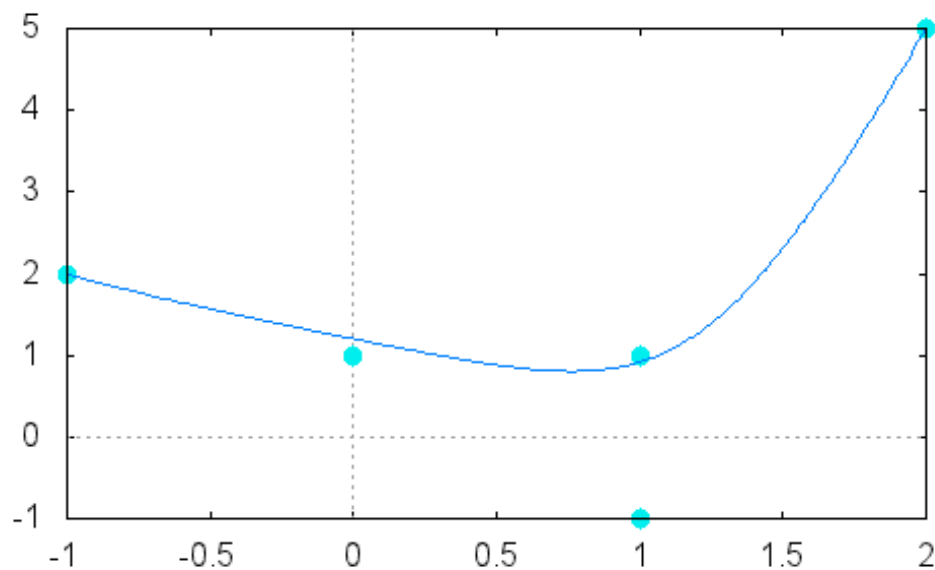
$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^4 \mathbf{b}_i B_i^4(t),$$

para los polinomios de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad B_i^4(t) = \binom{4}{i} t^i (1-t)^{4-i}.$$

Entonces la curva de Bézier es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (-1, 2)B_0^4(t) + (0, 1)B_1^4(t) + (1, 1)B_2^4(t) + (1, -1)B_3^4(t) + (2, 5)B_4^4(t) \\ &= (-1, 2) \binom{4}{0} t^0 (1-t)^4 + (0, 1) \binom{4}{1} t^1 (1-t)^3 + (1, 1) \binom{4}{2} t^2 (1-t)^2 \\ &\quad + (1, -1) \binom{4}{3} t^3 (1-t)^1 + (2, 5) \binom{4}{4} t^4 (1-t)^0 \\ &= (-1, 2)(1-t)^4 + (0, 1)4t^1(1-t)^3 + (1, 1)6t^2(1-t)^2 + (1, -1)4t^3(1-t)^1 + (2, 5)t^4 \\ &= (-1 + 4t - 4t^3 + 3t^4, 2 - 4t + 6t^2 - 12t^3 + 13t^4). \end{aligned}$$



La representación gráfica, con Maxima, de esta curva es

6. (3 PUNTOS) Sea S la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$$

para $u > 0, 0 < v < \pi$. Sea $P = \mathbf{x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. Se pide:

- (a) Determinar los coeficientes de la primera forma fundamental I_P de S en P .
- (b) Determinar el vector normal a la superficie en un punto $\mathbf{x}(u, v)$.
- (c) Determinar la ecuación del plano tangente en $\mathbf{x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución:

- (a) En un punto $\mathbf{x}(u, v)$ se tiene

$$\mathbf{x}_u = (\cos v, \sin v, 1), \quad \mathbf{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0).$$

Particularizando en $\mathbf{x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\mathbf{x}_u\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 1), \quad \mathbf{x}_v\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 0).$$

Entonces

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (0, 1, 1) \cdot (0, 1, 1) = 2, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (0, 1, 1) \cdot (-1, 0, 0) = 0, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (-1, 0, 0) \cdot (-1, 0, 0) = 1. \end{aligned}$$

Ya tenemos los coeficientes que nos permiten determinar la primera forma fundamental. Si $\mathbf{w} = (h, k)$ es un vector del plano tangente a S en P , expresado en la base $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$, entonces

$$I_P(\mathbf{w}) = Eh^2 + 2Fhk + Gk^2 = 2h^2 + 2 \cdot 0 \cdot hk + k^2 = 2h^2 + k^2.$$

(b) El vector normal es

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(u, v) &= \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|} \\ &= \frac{(\cos v, \sin v, 1) \times (-u \sin v, u \cos v, 0)}{\|(\cos v, \sin v, 1) \times (-u \sin v, u \cos v, 0)\|} \\ &= \frac{(-u \cos v, -u \sin v, (\cos^2 v)u + (\sin^2 v)u)}{\|(-u \cos v, -u \sin v, (\cos^2 v)u + (\sin^2 v)u)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}u} (-u \cos v, -u \sin v, u). \end{aligned}$$

(c) El plano tangente a la superficie por $\mathbf{x}(1, \frac{\pi}{2})$ contiene a los vectores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$. Por tanto, es perpendicular a $\mathbf{N}(1, \frac{\pi}{2})$. Además, contiene a $P = (0, 1, 1) = \mathbf{x}(1, \frac{\pi}{2})$. Como

$$\begin{aligned} \mathbf{N}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} \left(-1 \cos \frac{\pi}{2}, -1 \sin \frac{\pi}{2}, 1\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 1), \end{aligned}$$

su ecuación es

$$\begin{aligned} 0 &= \left((x, y, z) - \mathbf{x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \mathbf{N}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = ((x, y, z) - (0, 1, 1)) \cdot (0, -1, 1) \\ &= z - y. \end{aligned}$$



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Modelo B

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) ¿Cuál es la clausura convexa de un conjunto de puntos $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$?

Solución: Dado un conjunto de puntos $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, su clausura convexa es el conjunto de combinaciones baricéntricas de esos puntos de modo que las coordenadas baricéntricas (también llamadas pesos), además de sumar 1, son no negativas. Es decir, son los puntos $\mathbf{p}$ tales que

$$\mathbf{p} = \sum_{i=0}^3 \lambda_i p_i : \sum_{i=0}^3 \lambda_i = 1, \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i = 0, \dots, 3.$$

2. (1 PUNTO) Estudíese si las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = \cos^3 t + \sin t + 3.$$

definen una curva regular.

Solución: Sí la definen, porque para que sea una curva regular debe cumplirse que la función sea diferenciable (que lo es, porque sus componentes son continuas y tienen derivadas continuas hasta cualquier orden) y que no tenga puntos singulares.

Será regular si

$$(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0).$$

Como

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= 2t = 0, \\ y'(t) &= -3\cos^2 t \sin t + \cos t = 0, \end{aligned} \right\}$$

de la primera ecuación se deduce que $t = 0$, pero $y'(0) = 1$. Como no se anulan las dos a la vez, la función es regular.

3. (1 PUNTO) Sea S la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = (u^2 - v^2, u^2 + v^2, u)$$

para $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$. Determine el plano tangente a S en $\mathbf{x}(0, 1)$.

Solución: Hacemos:

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (2u, 2u, 1), \mathbf{x}_v(u, v) = (-2v, 2v, 0).$$

Particularizamos en $\mathbf{x}(0, 1) = (-1, 1, 0)$:

$$\mathbf{x}_u(0, 1) = (0, 0, 1), \mathbf{x}_v(0, 1) = (-2, 2, 0).$$

Entonces, la dirección normal está dada por

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -2, 0).$$

El plano tangente tiene por ecuación

$$\begin{aligned} ((x, y, z) - \mathbf{x}(0, 1)) \cdot (-2, -2, 0) &= 0 \iff (x + 1, y - 1, z) \cdot (-2, -2, 0) = 0 \\ &\iff x + 1 + y - 1 = 0 \iff x + y = 0. \end{aligned}$$

4. (1 PUNTO) Estudie si la parametrización

$$x = u + v, \quad y = u + u \cos v, \quad z = u^2 + v^2$$

con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ es regular.

Solución: Si $\mathbf{x}(u, v) = (u + v, u + u \cos v, u^2 + v^2)$, entonces

$$rg \begin{pmatrix} D_1 r_1(u, v) & D_1 r_2(u, v) & D_1 r_3(u, v) \\ D_2 r_1(u, v) & D_2 r_2(u, v) & D_2 r_3(u, v) \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 + \cos v & 2u \\ 1 & -u \sin v & 2v \end{pmatrix}.$$

Si $u \neq v$, entonces el rango es 2. Pero si $u = v$, entonces el rango es 2 si y sólo si:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 + \cos u \\ 1 & -u \sin u \end{vmatrix} &= -\cos u - u \sin u - 1 \neq 0 \\ &\iff 1 \neq -\cos u - u \sin u. \end{aligned}$$

Observamos que, por ejemplo, si $u = -\pi$ o $u = \pi$, entonces este determinante es 1. Por eso, la parametrización no es regular en $\mathbb{R}^2$.

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Dada la función $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$F(x, y, z, t) = (y^2 + t^4 - 2xz, y^3 + t^3 + x^3 - 1)$$

consideramos el punto $P = (1, -1, 1, 1)$.

- (a) Demostrar que $F(x, y, z, t) = 0$ define a $z = g_1(x, y)$ y $t = g_2(x, y)$ como funciones diferenciables de x e y en un entorno del punto $(1, -1)$.

(b) Evaluar en el punto $(1, -1)$ la diferencial de la función

$$g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$$

(c) Calcular $\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(1, -1)$ y $\frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(1, -1)$

Solución:

(a) Vemos que efectivamente se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita

- $F(1, -1, 1, 1) = (0, 0)$
- F es diferenciable con continuidad en $\mathbb{R}^4$
- $\begin{vmatrix} D_3 f_1(P) & D_4 f_1(P) \\ D_3 f_2(P) & D_4 f_2(P) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$

Luego existe V entorno de $(1, -1)$ y $g : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que

- g es diferenciable con continuidad
- $g(1, -1) = (1, 1)$
- $F(x, y, g(x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in V$

(b) Por el teorema de la función implícita

$$\begin{aligned} g'(1, -1) &= \begin{pmatrix} D_1 g_1(1, -1) & D_2 g_1(1, -1) \\ D_1 g_2(1, -1) & D_2 g_2(1, -1) \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} D_3 f_1(P) & D_4 f_1(P) \\ D_3 f_2(P) & D_4 f_2(P) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_1 f_1(P) & D_2 f_1(P) \\ D_1 f_2(P) & D_2 f_2(P) \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} D_1 g_1(1, -1) &= D_2 g_1(1, -1) = -3 \\ D_1 g_2(1, -1) &= D_2 g_2(1, -1) = -1 \end{aligned}$$

Este apartado también se puede resolver por medio de la derivación implícita, tal como se hace en el siguiente apartado.

(c) Derivando respecto a x en las condiciones

$$\begin{aligned} y^2 + g_2^4(x, y) - 2xg_1(x, y) &= 0 \\ y^3 + g_2^3(x, y) + x^3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} -2g_1(x, y) - 2xD_1g_1(x, y) + 4g_2^3(x, y) D_1g_2(x, y) &= 0 \\ 3g_2^2(x, y) D_1g_2(x, y) + 3x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Volviendo a derivar, resulta

$$\begin{aligned} -4D_1g_1(x, y) - 2xD_{11}g_1(x, y) + 12g_2^2(x, y) D_1^2g_2(x, y) + 4g_2^3(x, y) D_{11}g_2(x, y) &= 0 \\ 6g_2(x, y) D_1^2g_2(x, y) + 3g_2^2(x, y) D_{11}g_2(x, y) + 6x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Hacemos $x = 1, y = -1, D_1g_1(1, -1) = -3, D_1g_2(1, -1) = -1$ y obtenemos

$$\begin{aligned} 24 - 2D_{11}g_1(1, -1) + 4D_{11}g_2(x, y) &= 0 \\ 3D_{11}g_2(x, y) + 12 &= 0 \end{aligned}$$

por lo que es

$$\begin{aligned} D_{11}g_1(1, -1) &= \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(1, -1) = 4 \\ D_{11}g_2(1, -1) &= \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(1, -1) = -4 \end{aligned}$$

6. (3 PUNTOS) Las ecuaciones paramétricas, para $r > 0$,

$$\mathbf{x}(t) = (rt - r\operatorname{sen} t, r - r\cos t).$$

corresponden a una cicloide, para $t \in R$. Se pide:

- (a) Determinar la longitud de arco de la cicloide para un ciclo completo (para $t \in [0, 2\pi]$).
- (b) Parametrizar la cicloide por la longitud de arco, para $t \in [0, 2\pi]$.

Solución. La cicloide está dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (rt - r\operatorname{sen} t, r - r\cos t).$$

(a) Sabemos que es una curva regular si $t \neq 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ y que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (r - r\cos t, r\operatorname{sen} t) = (r(1 - \cos t), r\operatorname{sen} t), \\ \|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2\operatorname{sen}^2 t} = r\sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + \operatorname{sen}^2 t} \\ &= r\sqrt{2 - 2\cos t} = r\sqrt{2(1 - \cos t)} = r\sqrt{4\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}} = 2r \left| \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right|, \end{aligned}$$

porque

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} \implies 2\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} = 1 - \cos t.$$

Su longitud de arco, para $t \in [0, 2\pi]$ está dada por

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= \int_0^{2\pi} r\sqrt{2 - 2\cos t} dt = \int_0^{2\pi} 2r \left| \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right| dt = 2 \int_0^\pi 2r\operatorname{sen} \frac{t}{2} dt \\ &= 8r \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^\pi = 8r \left(-\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) \right) = 8r(0 + 1) = 8r. \end{aligned}$$

(b) Para parametrizar por la longitud de arco, hacemos

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t r\sqrt{2-2\cos t} dt = r \int_0^t 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 4r \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^t \\ &= 4r \left(-\cos \frac{t}{2} - (-\cos 0) \right) = 4r \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right). \end{aligned}$$

Entonces

$$t = \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right)$$

y la curva está parametrizada por el arco si hacemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \left(r \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) - r \sin \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right), r - r \cos \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) \right) \\ &= \left(r \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) - r \sqrt{1 - \left(-1 + \frac{1}{4} \frac{s}{r} \right)^2}, -\frac{s}{4} \right) \\ &= \left(r \arccos \left(1 - \frac{s}{4r} \right) - \frac{1}{4r} \sqrt{8rs + s^2}, -\frac{s}{4} \right). \end{aligned}$$



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero 2016. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Considere la transformación afín en el plano $f(x) = Ax + b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Pruebe que f es una isometría.

Solución: Para que f sea una isometría, A debe ser una matriz ortogonal, es decir, $AA^t = I$, donde I es la matriz identidad. Comprobémoslo:

$$AA^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I.$$

2. (1 PUNTO) Defina polinomios de Bernstein.

Solución: Son polinomios de grado n , cuya expresión es

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$

3. (1 PUNTO) Sea C una curva (llamada de Viviani) dada por la ecuación paramétrica

$$\mathbf{x}(t) = \left(1 + \cos t, \sin t, 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \right).$$

Calcule el vector binormal en el punto $\mathbf{x}(0)$.

Solución: Se tiene que

$$(2, 0, 0) = \mathbf{x}(0)$$

y por ello calculamos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \left(-\sin t, \cos t, \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right), & \mathbf{x}'(0) &= (0, 1, 1); \\ \mathbf{x}''(t) &= \left(-\cos t, -\sin t, -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} \right), & \mathbf{x}''(0) &= (-1, 0, 0). \end{aligned}$$

Por tanto, la dirección del vector binormal es la del vector

$$\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -j + k,$$

o equivalentemente, el vector $(0, -1, 1)$. Como el vector binormal es unitario,

$$\mathbf{b}(0) = \frac{(0, -1, 1)}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

4. (1 PUNTO) Sea $\mathbf{x}(u, v)$, para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ una parametrización de una superficie. Defina punto regular de la superficie y explique qué significa que una parametrización es regular.

Solución: Se dice que el punto de la superficie $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ es regular si la matriz cuyas (o columnas) son las derivadas parciales tiene rango 2 (es decir, si la matriz jacobiana tiene rango 2). Esto es equivalente a decir que los vectores $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ son linealmente independientes, o que

$$\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \neq 0.$$

Una parametrización es regular si todos sus puntos son regulares.

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Sea C la la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (t^5 - t, t^3 - t, t^2 - 1).$$

para $t \in [-2, 2]$.

- (a) Estudie si es una curva regular y si $(0, 0, 0)$ es un punto múltiple.
- (b) Determine la función curvatura. Escriba qué condición deben cumplir los puntos de esta curva para que sean puntos de inflexión. No es necesario hacer todos los cálculos, pero sí indicar todas las operaciones y todos los pasos.
- (c) Calcule las ecuaciones de las rectas tangente y normal que pasan por $\mathbf{x}(0)$.

Nota: Cada apartado vale 1 punto.

Solución:

- (a) La curva es regular si no tiene puntos singulares, es decir, puntos donde el vector derivada sea $(0, 0, 0)$. Como el vector derivada es

$$\mathbf{x}'(t) = (5t^4 - 1, 3t^2 - 1, 2t),$$

este vector se anula y sólo si

$$5t^4 - 1 = 0,$$

$$3t^2 - 1 = 0,$$

$$2t = 0.$$

Esto no ocurre simultáneamente para ningún valor de t , por tanto, es una curva regular. Para que sea $(0, 0, 0)$ sea punto múltiple debe ser

$$\lambda^5 - \lambda = 0, \lambda^3 - \lambda = 0, \lambda^2 - 1 = 0$$

para dos valores distintos de λ . Buscamos si existen estos valores:

$$\lambda^5 - \lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^4 - 1) = 0, \iff \lambda = \pm 1, \lambda = 0,$$

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 - 1) = 0, \iff \lambda = \pm 1, \lambda = 0,$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \iff (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \iff \lambda = \pm 1.$$

en $[-2, 2]$. Por eso, es un punto múltiple de multiplicidad 3.

(b) Sabemos que para curvas no parametrizadas por la longitud de arco, se tiene:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Para esta curva, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= (5t^4 - 1, 3t^2 - 1, 2t), \\ \mathbf{x}''(t) &= (20t^3, 6t, 2), \\ \|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{(5t^4 - 1)^2 + (3t^2 - 1)^2 + (2t)^2} \\ &= \sqrt{25t^8 - t^4 - 2t^2 + 2}, \\ \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5t^4 - 1 & 3t^2 - 1 & 2t \\ 20t^3 & 6t & 2 \end{vmatrix} \\ &= (5t^4 - 1, 3t^2 - 1, 2t) \times (20t^3, 6t, 2) \\ &= (-6t^2 - 2, 30t^4 + 2, 20t^3 - 6t - 30t^5).\end{aligned}$$

Su módulo es

$$m = \sqrt{(-6t^2 - 2)^2 + (30t^4 + 2)^2 + (20t^3 - 6t - 30t^5)^2}.$$

Por tanto, la función curvatura es

$$\begin{aligned}k(t) &= \frac{\sqrt{(-6t^2 - 2)^2 + (30t^4 + 2)^2 + (20t^3 - 6t - 30t^5)^2}}{\sqrt{(5t^4 - 1)^2 + (3t^2 - 1)^2 + (2t)^2}^3} \\ &= \frac{\sqrt{60t^2 - 84t^4 + 760t^6 - 300t^8 + 900t^{10} + 8}}{\sqrt{(5t^4 - 1)^2 + (3t^2 - 1)^2 + (2t)^2}^3} \\ &= \frac{4\sqrt{15t^2 - 21t^4 + 180t^6 - 75t^8 + 225t^{10} + 2}}{\sqrt{(5t^4 - 1)^2 + (3t^2 - 1)^2 + (2t)^2}^3}.\end{aligned}$$

Los puntos de inflexión son aquellos donde la curvatura $k(t)$ vale 0. Esto ocurre al menos en los puntos

$$15t^2 - 21t^4 + 190t^6 - 75t^8 + 225t^{10} + 2 = 0.$$

(c) La recta tangente que pasa por $\mathbf{x}(0) = (0, 0, -1)$ tiene por vector director a

$$\mathbf{x}'(0) = (-1, -1, 0).$$

por tanto, su ecuación paramétrica es

$$\alpha(\lambda) = (0, 0, -1) + \lambda(-1, -1, 0) = (-\lambda, -\lambda, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La recta normal en $\mathbf{x}(0)$ pasa por $(0, 0, -1)$ y un vector director suyo esLa recta tangente que pasa por $\mathbf{x}(0) = (0, 0, -1)$ tiene por vector director a

$$\mathbf{x}'(0) = (-1, -1, 0).$$

por tanto, su ecuación paramétrica es

$$\alpha(\lambda) = (0, 0, -1) + \lambda(-1, -1, 0) = (-\lambda, -\lambda, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

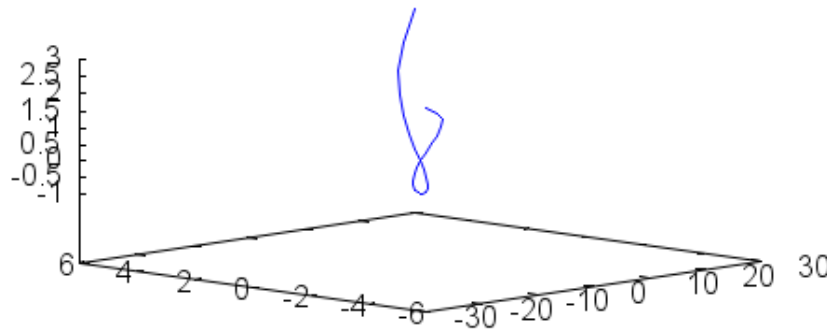
La recta normal en $\mathbf{x}(0)$ pasa por $(0, 0, -1)$ y un vector director suyo es

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) &= ((-1, -1, 0) \times (0, 0, 2)) \times (-1, -1, 0) \\ &= (-2, 2, 0) \times (-1, -1, 0) = (0, 0, 4).\end{aligned}$$

Como este vector tiene la misma dirección que $(0, 0, 1)$, podemos escribir su ecuación paramétrica como

$$\beta(\lambda) = (0, 0, -1) + \lambda(0, 0, 1) = (0, 0, -1 + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Una representación gráfica de esta curva es la siguiente:



Se ha representado utilizando las sentencias de Maxima:

```
load(draw)$
```

```
wxdraw3d(parametric(t^5-t,t^3-t, t^2-1,t,-2,2),view=[71,314]);
```

6. (3 PUNTOS) Sea S la superficie dada por

$$z = x^2 + y^2.$$

- Determine los coeficientes de la primera forma fundamental.
- Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental. Clasifique los puntos de la superficie.
- Determine la curvatura de Gauss y la curvatura media de la superficie en el punto $(1, 0, 1)$.

Nota: Cada apartado vale 1 punto.

Solución:

(a) La superficie está dada por la ecuación $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= (1, 0, 2u), \quad \mathbf{x}_v(u, v) = (0, 1, 2v), \\ \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -2u\mathbf{i} - 2v\mathbf{j} + \mathbf{k}\end{aligned}$$

Entonces los coeficientes de la primera forma fundamental son:

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (1, 0, 2u) \cdot (1, 0, 2u) = 1 + 4u^2, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (1, 0, 2u) \cdot (0, 1, 2v) = 4uv, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (0, 1, 2v) \cdot (0, 1, 2v) = 1 + 4v^2.\end{aligned}$$

(b) Tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) &= (-2u, -2v, 1), \\ \mathbf{N}(u, v) &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} (-2u, -2v, 1), \\ \mathbf{x}_{uu}(u, v) &= (0, 0, 2), \quad \mathbf{x}_{uv}(u, v) = (0, 0, 0), \\ \mathbf{x}_{vv}(u, v) &= (0, 0, 2).\end{aligned}$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental son:

$$\begin{aligned}e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} (-2u, -2v, 1) \cdot (0, 0, 2) = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} (-2u, -2v, 1) \cdot (0, 0, 0) = 0, \\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} (-2u, -2v, 1) \cdot (0, 0, 2) = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.\end{aligned}$$

Podemos clasificar los puntos calculamos

$$eg - f^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \right)^2 > 0$$

para todo (u, v) . Luego todos los puntos son elípticos.

(c) Tenemos que $(1, 0, 1) = \mathbf{x}(1, 0)$. En este punto, tenemos:

$$\begin{aligned}E &= 1 + 4(1)^2 = 5, \\ F &= 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0, \\ G &= 1 + 4 \cdot 0^2 = 1, \\ e &= \frac{2}{\sqrt{4(1)^2 + 4 \cdot 0^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ f &= 0, \\ g &= \frac{2}{\sqrt{4(1)^2 + 4 \cdot 0^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

La curvatura de Gauss es

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}} \frac{2}{\sqrt{5}} - 0}{5 \cdot 1} = \frac{4}{25}.$$

La curvatura media es

$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} = \frac{5 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - 0}{2(5 \cdot 1 - 0)} = \frac{6}{25} \sqrt{5}.$$



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero 2016. Modelo B

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Sea $f(x, y) = (e^x y^4, y \cos x^3)$. Determinar su matriz jacobiana.

Solución:

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} e^x y^4 & 4e^x y^3 \\ -3yx^2 \sin x^3 & \cos x^3 \end{pmatrix}.$$

2. (1 PUNTO) Estudie si la curva $\mathbf{x} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x}(t) = (\cos t, e^t - t, t^4)$ es regular.

Solución: Una curva es regular si sus componentes son diferenciables y además no se anulan a la vez (es decir, si no tiene puntos singulares, o puntos donde $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{0}$). En esta curva, las componentes son diferenciables, porque $\cos t$, e^t , los polinomios y sus sumas lo son. Se cumple, entonces, la primera condición. Vamos a ver si hay algún t para el que $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (-\sin t, e^t - 1, 4t^3) = (0, 0, 0) \\ \iff \begin{cases} \sin t = 0 \implies t = k\pi, \\ e^t - 1 = 0 \implies t = 0, \\ 4t^3 = 0 \implies t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Observamos que

$$\mathbf{x}'(0) = (0, 0, 0)$$

por lo que la curva no es regular, al ser $t = 0$ un punto singular.

3. (1 PUNTO) Demuestre que la curvatura de una recta es 0.

Solución: Siempre podemos parametrizar la curva por la longitud de arco y determinar su curvatura, sin perder generalidad. Sabemos que una recta parametrizada por el arco está dada por la ecuación

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{p} + s\mathbf{v},$$

donde $\mathbf{p}$ es un punto por el que pasa la recta y $\mathbf{v}$ es un vector unitario que es el vector director de la recta. Además, sabemos que

$$\mathbf{x}'(s) = \mathbf{v}, \quad \|\mathbf{x}'(s)\| = \|\mathbf{v}\| = 1.$$

Por eso,

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s) = \mathbf{0}, \quad k(s) = 0.$$

Intuitivamente confirmamos este resultado, porque una recta no es una curva.

No es válido el razonamiento de que en una recta la aceleración es el vector nulo, porque esto sólo es así si está parametrizada por la longitud de arco. De hecho, el ejercicio 18 de "Notas de Geometría diferencial" pide que se encuentre una parametrización de una recta recorrida a velocidad no constante. Como ejemplo sirve: $(1 - \cos t, -1 + 3 \cos t)$.

4. (1 PUNTO) Determinénse el vector tangente y la recta tangente, en $\mathbf{x}(0)$ a la curva de ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(t) = (t^2 \cos t, t \sin t, 3t).$$

Solución: Tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = (2t \cos t - t^2 \sin t, \sin t + t \cos t, 3), \quad \mathbf{x}'(0) = (0, 0, 3).$$

Luego el vector tangente unitario es $(0, 0, 1)$. Además, $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$. Por tanto, la recta tangente es

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, 0, 3).$$

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Sea la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 + t^2 - t - 1, t^2 - 1).$$

- (a) Escribese como una curva de Bézier considerando $t \in [0, 1]$.
 (b) Estudie si es una curva regular para $t \in \mathbb{R}$. Estudie si tiene puntos múltiples para $t \in \mathbb{R}$ y determínelos, en caso de que los tenga.

Nota: Cada apartado puntúa 1.5 puntos.

Solución:

- (a) Como el grado máximo de los polinomios que dan las componentes es 3, entonces se puede escribir como una curva de Bézier a partir de los polinomios de Bernstein de grado 3.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i B_i^3(t) \\ &= \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\ &= \mathbf{b}_0 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} t^3 (1-t)^0 \\ &= \mathbf{b}_0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 3t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 3t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 t^3. \end{aligned}$$

Si llamamos $\mathbf{b}_i = (x_i, y_i)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0) (1-t)^3 + (x_1, y_1) 3t^1 (1-t)^2 + (x_2, y_2) 3t^2 (1-t)^1 + (x_3, y_3) t^3 \\ &= \begin{pmatrix} x_0 - 3x_0t + 3x_0t^2 - x_0t^3 + 3tx_1 - 6t^2x_1 + 3t^3x_1 + 3t^2x_2 - 3t^3x_2 + t^3x_3, \\ y_0 - 3y_0t + 3y_0t^2 - y_0t^3 + 3ty_1 - 6t^2y_1 + 3t^3y_1 + 3t^2y_2 - 3t^3y_2 + t^3y_3 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} x_0 + (-3x_0 + 3x_1)t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3, \\ y_0 + (-3y_0 + 3y_1)t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3 \end{pmatrix}^t \\ &= (t^3 + t^2 - t - 1, t^2 - 1). \end{aligned}$$

Igualando la segunda componente, obtenemos:

$$y_0 + (-3y_0 + 3y_1)t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3 = t^2 - 1,$$

lo que implica

$$y_0 = -1,$$

$$-3y_0 + 3y_1 = 0 \implies 3y_1 = 3(-1) = -3 \implies y_1 = -1,$$

$$3y_0 - 6y_1 + 3y_2 = 1 \implies 3y_2 = 1 - 3y_0 + 6y_1 = 1 - 3(-1) + 6(-1) = -2 \implies y_2 = -\frac{2}{3},$$

$$-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3 = 0 \implies y_3 = y_0 - 3y_1 + 3y_2 = -1 - 3(-1) + 3\left(-\frac{2}{3}\right) = 0.$$

De la misma forma, con la primera componente, tenemos:

$$x_0 + (-3x_0 + 3x_1)t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3 = t^3 + t^2 - t - 1.$$

Se deduce:

$$x_0 = -1,$$

$$-3x_0 + 3x_1 = -1 \implies 3x_1 = -1 - 3 = -4 \implies x_1 = -\frac{4}{3},$$

$$3x_0 - 6x_1 + 3x_2 = 1 \implies 3x_2 = 1 - 3x_0 + 6x_1 = 1 - 3(-1) + 6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -4 \implies x_2 = -\frac{4}{3},$$

$$-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \implies x_3 = 1 + x_0 - 3x_1 + 3x_2 = 1 - 1 - 3\left(-\frac{4}{3}\right) + 3\left(-\frac{4}{3}\right) = 0.$$

Entonces, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (t^3 + t^2 - t - 1, t^2 - 1) = \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\ &= (-1, -1) B_0^3(t) + \left(-\frac{4}{3}, -1\right) B_1^3(t) + \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) B_2^3(t) + (0, 0) B_3^3(t). \end{aligned}$$

Podíamos haber calculado los puntos de control como:

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{x}(0) = (-1, -1),$$

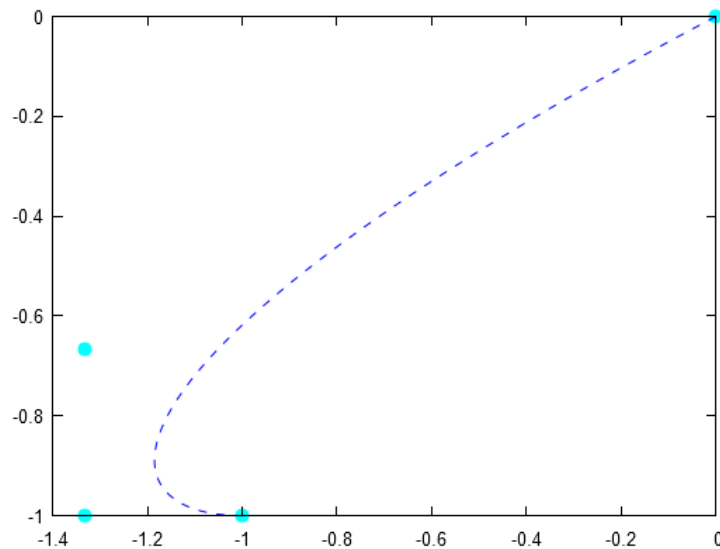
$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{x}(1) = (0, 0),$$

$$\mathbf{x}'(0) = 3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \implies \mathbf{b}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{x}'(0) + \mathbf{b}_0 = \left(-\frac{1}{3} - 1, -1\right)$$

$$\implies \mathbf{b}_1 = \left(-\frac{4}{3}, -1\right),$$

$$\mathbf{x}'(1) = 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) \implies \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{x}'(1) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

La gráfica es:



(b) La curva

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 + t^2 - t - 1, t^2 - 1).$$

es regular si sus componentes son diferenciables y además no tiene puntos singulares, o puntos donde $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{0}$). Las componentes son diferenciables, porque los polinomios y sus sumas lo son. Se cumple, entonces, la primera condición.

Comprobemos que su derivada no es $(0, 0)$ nunca. Como esto significa

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= (3t^2 + 2t - 1, 2t) = (0, 0) \\ \implies \begin{cases} 3t^2 + 2t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{3}, -1, \\ 2t = 0 \iff t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Como los valores de t que dan son distintos, entonces no puede ser $\mathbf{x}'(t) = (0, 0)$ para $t \in \mathbb{R}$ y, por eso, la curva es regular.

Estudiamos si tiene puntos múltiples buscando t_1 y t_2 tales que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2) &\iff (t_1^3 + t_1^2 - t_1 - 1, t_1^2 - 1) = (t_2^3 + t_2^2 - t_2 - 1, t_2^2 - 1) \\ &\iff \begin{cases} t_1^3 + t_1^2 - t_1 = t_2^3 + t_2^2 - t_2, \\ t_1^2 = t_2^2 \iff t_1 = \pm t_2. \end{cases} \end{aligned}$$

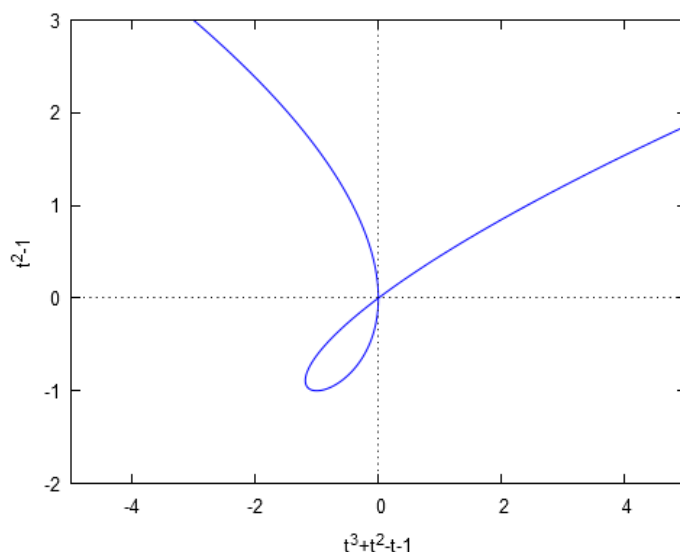
Sustituimos $t_1 = -t_2$, obtenida en la segunda condición (la condición $t_1 = t_2$ no resulta interesante para determinar puntos múltiples), en la primera para ver en qué valores se cumple de t_1, t_2 :

$$\begin{aligned}t_1^3 + t_1^2 - t_1 &= (-t_1)^3 + (-t_1)^2 - (-t_1) = -t_1^3 + t_1^2 + t_1 \\ \implies t_1^3 - t_1 &= 0 \implies t_1 = 0 \text{ o } t_1 = \pm 1. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(-1) = (0, 0).$$

La gráfica de la función es:



Esta gráfica se ha hecho con la sentencia: `wxplot2d(['parametric', t^3+t^2-t-1, t^2-1, [t, -2, 2], [nticks, 300]]], [x,-5,5],[y,-2,3])$.`

6. (3 PUNTOS) Sea S la superficie dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, \sin v, u^3).$$

- Determine los coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie en el punto $\mathbf{x}(1, 0)$.
- Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental de la superficie en el punto $\mathbf{x}(1, 0)$.

- (c) Sea C la curva en la superficie S determinada si consideramos $(u(t), v(t)) = (t^2 + 1, \pi t)$ para $t \in [-1, 1]$. Determine el vector tangente a esta curva a partir de $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$. No se considerará respuesta válida la que lo determina sin considerar estos vectores.

Nota: Cada apartado puntúa 1 punto.

Solución:

- (a) Partimos de

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u, v) &= (u \cos v, \sin v, u^3), \\ \mathbf{x}_u(u, v) &= (\cos v, 0, 3u^2), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (-u \sin v, \cos v, 0).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (\cos v, 0, 3u^2) \cdot (\cos v, 0, 3u^2) = 9u^4 + \cos^2 v, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (\cos v, 0, 3u^2) \cdot (-u \sin v, \cos v, 0) = -u \cos v \sin v, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (-u \sin v, \cos v, 0) \cdot (-u \sin v, \cos v, 0) = \cos^2 v + u^2 \sin^2 v.\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(1, 0) &= (1, 0, 1), \\ \mathbf{x}_u(1, 0) &= (1, 0, 3), \\ \mathbf{x}_v(1, 0) &= (0, 1, 0).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (1, 0, 3) \cdot (1, 0, 3) = 1 + 9 = 10, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (1, 0, 3) \cdot (0, 1, 0) = 0, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0) = 1^2 = 1.\end{aligned}$$

- (b) Tenemos que calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental en $\mathbf{x}(1, 0) = (0, 0, 0)$. Sabemos que

$$\mathbf{x}_u(1, 0) = (1, 0, 3), \quad \mathbf{x}_v(1, 0) = (0, 1, 0).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(1, 0) \times \mathbf{x}_v(1, 0) &= (1, 0, 3) \times (0, 1, 0) = (-3, 0, 1), \\ \mathbf{N} &= \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 0, 1).\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu}(u, v) &= (0, 0, 6u), \quad \mathbf{x}_{uv}(u, v) = (-\sin v, 0, 0), \quad \mathbf{x}_{vv}(u, v) = (-u \cos v, -\sin v, 0), \\ \mathbf{x}_{uu}(1, 0) &= (0, 0, 6), \quad \mathbf{x}_{uv}(1, 0) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{x}_{vv}(1, 0) = (-1, 0, 0).\end{aligned}$$

Por eso:

$$\begin{aligned}e &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0, 0, 6) \cdot (-3, 0, 1) = \frac{3}{5}\sqrt{10}, \\ f &= \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0, 0, 0) \cdot (-3, 0, 1) = 0, \\ g &= \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 0, 0) \cdot (-3, 0, 1) = \frac{3}{10}\sqrt{10}.\end{aligned}$$

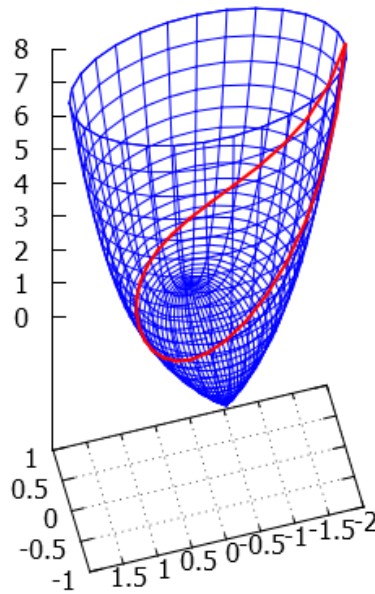
(c) Consideramos la curva dada por

$$(u(t), v(t)) = (t^2 + 1, \pi t)$$

para $t \in [-1, 1]$ contenida en la superficie. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u(t), v(t)) &= \mathbf{x}(u, v) = (u(t) \cos v(t), \sin v(t), (t^2 + 1)^3) \\ &= ((t^2 + 1) \cos(\pi t), \sin(\pi t), (t^2 + 1)^3) \end{aligned}$$

está contenida en la superficie. Se representa en la siguiente figura:



Determinamos el vector tangente a la curva en $t = 0$. Como

$$\begin{aligned} u'(t) &= 2t, \quad v'(t) = \pi, \\ \mathbf{x}_u(u, v) &= (\cos v, 0, 3u^2), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (-u \sin v, \cos v, 0), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= u'(t) \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t) \mathbf{x}_v(u(t), v(t)) \\ &= 2t (\cos \pi t, 0, 3(t^2 + 1)^2) + \pi (-(t^2 + 1) \sin \pi t, \cos \pi t, 0) \\ \mathbf{x}'(0) &= 2 \cdot 0 (\cos 0, 0, 3 \cdot 1^2) + \pi (-1 \sin 0, \cos 0, 0) \\ &= (0, \pi, 0). \end{aligned}$$



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Septiembre 2015. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Estudie si el punto $(0, 0)$ es un punto doble de la curva general dada por las ecuaciones

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{t^3-t}{1+t^2}.$$

Solución: Sí lo es, porque

$$\begin{aligned} x(t) = 0 &\iff 1-t^2 = 0 \iff t = \pm 1, \\ y(t) = 0 &\iff t^3-t = 0 \iff t(t^2-1) = 0 \iff t = 0 \text{ o } t = \pm 1. \end{aligned}$$

Entonces, este punto es imagen de $t = 1$ y de $t = -1$.

2. (1 PUNTO) Escriba las ecuaciones de Frenet para curvas planas.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= k(s) \mathbf{n}(s), \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -k(s) \mathbf{t}(s), \end{aligned}$$

3. (1 PUNTO) Estudie si la parametrización

$$x = u, \quad y = u - v, \quad z = u^2 + v^2$$

con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ es regular.

Solución: Sí lo es, porque si $\mathbf{x}(u, v) = (u, u - v, u^2 + v^2)$, entonces

$$rg \begin{pmatrix} D_1 r_1(u, v) & D_1 r_2(u, v) & D_1 r_3(u, v) \\ D_2 r_1(u, v) & D_2 r_2(u, v) & D_2 r_3(u, v) \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2u \\ 0 & -1 & 2v \end{pmatrix} = 2$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

4. (1 PUNTO) Sea S la superficie parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u^2, e^v + \cos u, u + v)$$

para $u, v \in \mathbb{R}$. Determinar el vector normal a la superficie en un punto $\mathbf{x}(u, v)$.

Solución:

En un punto $\mathbf{x}(u, v)$ se tiene

$$\mathbf{x}_u = (2u, -\operatorname{sen} u, 1), \quad \mathbf{x}_v = (0, e^v, 1).$$

El vector normal (unitario) es

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(u, v) &= \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|} \\ &= \frac{(2u, -\operatorname{sen} u, 1) \times (0, e^v, 1)}{\|(2u, -\operatorname{sen} u, 1) \times (0, e^v, 1)\|} \\ &= \frac{(-\operatorname{sen} u - e^v, -2u, 2ue^v)}{\|(-\operatorname{sen} u - e^v, -2u, 2ue^v)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{sen} u + e^v)^2 + 4u^2 + 4u^2e^{2v}}} (-\operatorname{sen} u - e^v, -2u, 2ue^v). \end{aligned}$$

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Sea f la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y).$$

Razone:

- (a) si esta función es localmente invertible en cada punto de $\mathbb{R}^2$,
- (b) si tiene inversa global.

Solución: Es localmente invertible en cada punto de $\mathbb{R}^2$, pero no tiene inversa global porque no es inyectiva.

- (a) Es de clase infinito en $\mathbb{R}^2$ por ser indefinidamente derivable. Además el determinante de la matriz jacobiana en un punto (x, y) es

$$\det f'(x, y) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \operatorname{sen}^2 y = e^{2x}$$

y esto es mayor que 0. para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Podemos asegurar que f tiene inversa local en un entorno de cada punto en donde este determinante es distinto de 0. Como no se anula en ningún punto, sabemos que f es localmente invertible en cada punto de $\mathbb{R}^2$.

- (b) Pero la función no tiene inversa global porque no es inyectiva. La razón está en que aparecen las razones trigonométricas y entonces:

$$f(x, y) = f(x, y + 2\pi).$$

Nota: La puntuación de cada uno de los apartados es 1.5 puntos.

6. (3 PUNTOS) Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (t^2, 4t, t^3).$$

- (a) Determine el radio de curvatura en $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$.
- (b) Determine la recta tangente en $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$.
- (c) Determine el plano osculador en $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$.

Nota: La puntuación de cada uno de los apartados es 1 punto.

(a) El radio de curvatura R es el inverso de la curvatura k . Sabemos que

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Para esta curva, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= (2t, 4, 3t^2), \quad \mathbf{x}''(t) = (2, 0, 6t), \\ \mathbf{x}'(0) &= (0, 4, 0), \quad \mathbf{x}''(0) = (2, 0, 0), \quad \|\mathbf{x}'(0)\| = 4, \\ \mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8k, \quad \|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\| = 8.\end{aligned}$$

Entonces

$$k(0) = \frac{8}{4^3} = \frac{1}{8},$$

y el radio de curvatura es

$$R(0) = \frac{1}{1/8} = 8.$$

(b) Un vector tangente en $t = 0$ es el vector

$$\mathbf{x}'(0) = (0, 4, 0).$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$\begin{aligned}(x, y, z)(t) &= \mathbf{x}(0) + t\mathbf{x}'(0) \\ &= (0, 0, 0) + (0, 4t, 0).\end{aligned}$$

(c) El vector normal tiene la misma dirección y sentido que

$$(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t).$$

En este caso, es

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) &= ((0, 4, 0) \times (2, 0, 0)) \times (0, 4, 0) = (0, 0, -8) \times (0, 4, 0) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (32, 0, 0).\end{aligned}$$

Por eso, el vector normal es el vector

$$\mathbf{n}(0) = (1, 0, 0).$$

El vector binormal es

$$\mathbf{b}(0) = (0, 1, 0) \times (1, 0, 0) = (0, 0, -1).$$

Por eso, el osculador es

$$\begin{aligned}((x, y, z) - \mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{b}(0) &= 0 \Leftrightarrow ((x, y, z) - (0, 0, 0)) \cdot (0, 0, -1) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0.\end{aligned}$$

Este apartado también se puede resolver teniendo en cuenta que un punto (x, y, z) del plano osculador va a verificar:

$$\begin{aligned}0 &= \det(\mathbf{x}'(0), \mathbf{x}''(0), (x, y, z) - \mathbf{x}(0)) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -8z.\end{aligned}$$

Por eso, la ecuación del plano osculador en $(0, 0, 0)$ es:

$$z = 0.$$



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero 2017. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sean los puntos $\mathbf{p}_0 = (0, 1)$, $\mathbf{p}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{p}_2 = (2, 1)$. ¿Son una referencia afín? En caso de que lo sean, determine las coordenadas baricéntricas $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ del punto $(-1, 3)$ respecto a esta referencia.

Solución: Son referencia afín si los siguientes vectores son linealmente independientes:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = (1, -1) - (0, 1) = (1, -2), \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 = (2, 1) - (0, 1) = (2, 0).\end{aligned}$$

El determinante de la matriz que forman es

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

y, por tanto, son base de $\mathbb{R}^2$. Luego son una referencia afín. Las coordenadas baricéntricas de $(-1, 3)$ son

$$(x, y) = \lambda_0(0, 1) + \lambda_1(1, -1) + \lambda_2(2, 1),$$

con $1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$. Entonces

$$\begin{aligned}(-1, 3) &= \lambda_0(0, 1) + \lambda_1(1, -1) + (1 - \lambda_0 - \lambda_1)(2, 1) \\ &= (-2\lambda_0 - \lambda_1 + 2, -2\lambda_1 + 1).\end{aligned}$$

Por eso:

$$\begin{aligned}3 &= -2\lambda_1 + 1 \implies \lambda_1 = -1, \\ -1 &= -2\lambda_0 - \lambda_1 + 2 = -2\lambda_0 + 1 + 2 = -2\lambda_0 + 3 \implies \lambda_0 = 2, \\ \lambda_2 &= 1 - \lambda_0 - \lambda_1 = 1 - 2 - (-1) = 0.\end{aligned}$$

2. (1 punto) Sea $\mathbf{v} = (1, -1, -1) \times (2, -1, 0)$, es decir, es el producto vectorial de $(1, -1, -1)$ y $(2, -1, 0)$. Determine $\mathbf{v}$. ¿Es perpendicular al vector $\mathbf{u} = (2, -1, 0)$?

Solución: Para determinar el producto vectorial, hacemos

$$(1, -1, -1) \times (2, -1, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = (-1, -2, 1).$$

Es perpendicular a $(2, -1, 0)$ si y sólo si su producto escalar es 0. Como:

$$(-1, -2, 1) \cdot (2, -1, 0) = -1 \cdot 2 + (-2)(-1) = 0,$$

son perpendiculares.

3. (1 punto) Determinése el vector tangente y la recta tangente, en $t = 0$, a la curva de ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2 e^t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = e^{t^2}.$$

Solución: Tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = (2te^t - t^2 e^t, \cos t, 2te^{t^2}), \quad \mathbf{x}'(0) = (0, 1, 0).$$

Además, $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$. Por tanto, la recta tangente es

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, 0).$$

4. (1 punto) Escriba la ecuación de una curva $\mathbf{x} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que sea regular, y con $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 2)$ y cuya velocidad no sea un vector constante. Compruebe que es así.

Nota: Muchas curvas polinómicas, con al menos una componente de grado 2, lo cumplen.

Solución: Vamos a elegir una curva polinómica con la primera componente de grado 2 para que el vector velocidad no sea constante. Podíamos haber elegido cualquier grado mayor que 2 en una de las componentes. Pero si el grado de todas las componentes fuera 1, el vector tangente sería constante.

Como $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 2)$, podemos buscar curvas de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = (a_1 t^2 + b_1 t + 1, b_2 t, b_3 t + 2).$$

Además, debe ser

$$\mathbf{x}'(t) = (2a_1 t + b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0) \text{ en } [0, 1].$$

Elegimos, por ejemplo, o b_2 o b_3 distintas de 0, y así la curva ya va a ser regular. Y $a_1 \neq 0$ para que el vector velocidad no sea constante.

Por ejemplo,

$$b_2 = 1, b_3 = -1, a_1 = 1, b_1 = 0.$$

da la siguiente curva, que cumple estas condiciones:

$$\mathbf{x}(t) = (t^2 + 1, t, -t + 2).$$

Otros ejemplos sencillos son curvas donde aparecen funciones trigonométricas o exponenciales.

EJERCICIOS

5. (3 puntos) Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 + 2t - 1, t^2 + 1).$$

- Estudie si es una curva regular y si tiene puntos múltiples.
- Determine la función curvatura y el radio de curvatura en $\mathbf{x}(t)$.
- Determine el centro de curvatura en $\mathbf{x}(0)$. Escriba la ecuación de la circunferencia osculadora en $\mathbf{x}(0)$.

Solución: Cada apartado puntúa 1 punto.

a) La curva

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 + 2t - 1, t^2 + 1)$$

es regular si sus componentes son diferenciables y la función derivada no es $(0, 0)$ nunca. Como esto significa

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= (3t^2 + 2, 2t) = (0, 0) \\ \implies 3t^2 + 2 &= 0, 2t = 0.\end{aligned}$$

Pero la primera condición es imposible, porque $t^2 \geq 0$ siempre. Entonces, la curva es regular. Estudiamos si tiene puntos múltiples buscando t_1 y t_2 tales que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2) &\iff (t_1^3 + 2t_1^2 - 1, t_1^2 + 1) = (t_2^3 + 2t_2^2 - 1, t_2^2 + 1) \\ \iff \begin{cases} t_1^3 + 2t_1^2 - 1 = t_2^3 + 2t_2^2 - 1 \\ t_1^2 = t_2^2 \end{cases} &\iff t_1^3 + 2t_1^2 = t_2^3 + 2t_2^2, \\ &\iff t_1^2 = t_2^2 \iff t_1 = \pm t_2.\end{aligned}$$

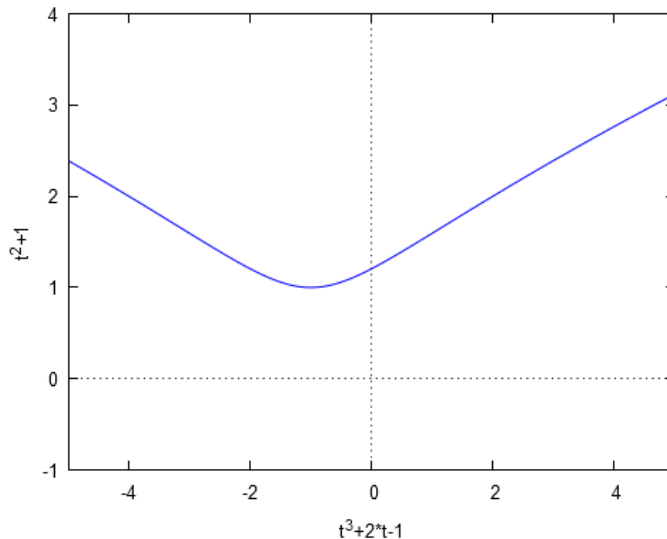
Sustituimos $t_1 = -t_2$, obtenido en la segunda condición (la condición $t_1 = t_2$ no resulta interesante para determinar puntos múltiples), en la primera ecuación. Tenemos:

$$\begin{aligned}t_1^3 + 2t_1^2 &= (-t_1)^3 + 2(-t_1)^2 = -t_1^3 + 2t_1^2 \\ \implies t_1^3 - t_1 &= 0 \implies t_1 = 0 \text{ o } t_1 = \pm 1.\end{aligned}$$

Resulta:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(-1) = (0, 0).$$

La gráfica de la función es



Esta gráfica se ha hecho con la sentencia: `wxplot2d([[ 'parametric, t^3+2*t-1, t^2+1, [t, -2, 2], [nticks, 300]]], [x,-5,5],[y,-1,4])$`.

b) Un vector tangente a la curva en $\mathbf{x}(t)$ es

$$\mathbf{x}'(t) = (3t^2 + 2, 2t).$$

Además:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{(3t^2 + 2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 16t^2 + 4}, \\ \mathbf{x}''(t) &= (6t, 2).\end{aligned}$$

Ahora podemos calcular la curvatura:

$$\begin{aligned} k(t) &= \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\ &= \begin{vmatrix} 3t^2 + 2 & 2t \\ 6t & 2 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 16t^2 + 4}^3} \\ &= \frac{4 - 6t^2}{\sqrt{9t^4 + 16t^2 + 4}^3}. \end{aligned}$$

El radio de curvatura es

$$r(t) = \frac{1}{|k(t)|} = \frac{\sqrt{9t^4 + 16t^2 + 4}^3}{|4 - 6t^2|}.$$

c) Como el vector tangente es

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 16t^2 + 4}}(3t^2 + 2, 2t),$$

el vector normal es

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 16t^2 + 4}}(-2t, 3t^2 + 2).$$

Particularizamos en $\mathbf{x}(0) = (-1, 1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(0) &= \frac{1}{\sqrt{9 \cdot 0^4 + 16 \cdot 0^2 + 4}}(3 \cdot 0^2 + 2, 2 \cdot 0) = (1, 0), \\ \mathbf{n}(0) &= \frac{1}{\sqrt{9 \cdot 0^4 + 16 \cdot 0^2 + 4}}(-2 \cdot 0, 3 \cdot 0^2 + 2) = (0, 1), \\ k(0) &= \frac{4 - 6 \cdot 0^2}{\sqrt{9 \cdot 0^4 + 16 \cdot 0^2 + 4}^3} = \frac{1}{2}, \\ r(0) &= 2. \end{aligned}$$

El vector curvatura es

$$\mathbf{k}(0) = k(0) \mathbf{n}(0) = \frac{1}{2}(0, 1).$$

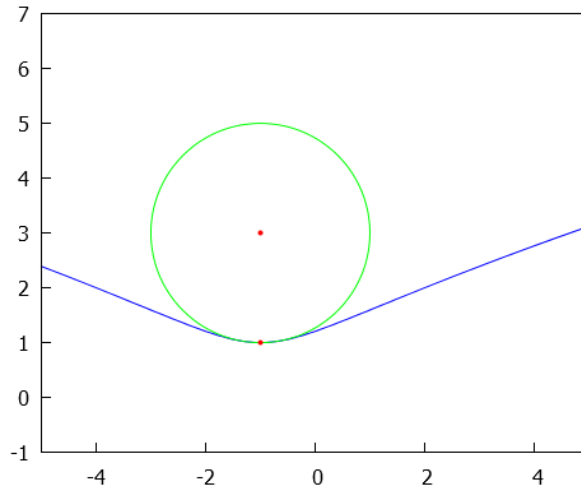
El centro de curvatura es el punto

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(0) &= \mathbf{x}(0) + \frac{1}{k(0)}\mathbf{n}(0) \\ &= (-1, 1) + \frac{1}{1/2}(0, 1) = (-1, 3). \end{aligned}$$

Entonces, la circunferencia osculadora tiene por ecuación

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

Si representamos la curva, la circunferencia osculadora, los centros de curvatura, observamos esto:



6. (3 puntos) Considere la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(-\frac{1}{2} \cos(2u), \frac{1}{2} \sin(2u), -v \right), \quad u, v \in [0, 2\pi].$$

Compruebe que la parametrización es regular y determine el área de la región delimitada por las curvas coordenadas $u_0 = 0, u_1 = \pi, v_0 = 0$ y $v_1 = \pi$.

Solución: Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (\sin(2u), \cos(2u), 0), \\ \mathbf{x}_v &= (0, 0, -1). \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin(2u) & \cos(2u) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-\cos(2u), \sin(2u), 0).$$

La parametrización es regular ya que $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq (0, 0, 0) \forall u, v \in [0, 2\pi]$.

Determinemos los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \cos^2(2u) + \sin^2(2u) = 1, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1. \end{aligned}$$

Entonces $\sqrt{EG - F^2} = 1$, por lo que

$$A = \int_0^\pi \int_0^\pi \sqrt{EG - F^2} du dv = \pi^2.$$



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero 2017. Modelo B

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Defina isometría.

Solución: Es una transformación afín de la forma $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, donde la matriz $\mathbf{A}$ es ortogonal, es decir, $\mathbf{A}\mathbf{A}^t = \mathbf{I}$.

2. (1 punto) Estudie si la curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (\sin t, t^2)$ es regular. Determine sus puntos múltiples, si los tiene.

Solución. Sí lo es, porque su derivada

$$\alpha'(t) = (\cos t, 2t)$$

no se anula para ningún valor de t .

No tiene puntos múltiples porque

$$\alpha(t) = (\sin t, t^2) = (\sin t', (t')^2) = \alpha(t') \implies t = t' + 2k\pi, t' = \pm t$$

y no se pueden cumplir las dos condiciones a la vez.

3. (1 punto) Determine la envolvente de la familia de circunferencias de radio 1 y centro en el eje OX , dada por las ecuaciones paramétricas:

$$\mathbf{x}(\lambda, t) = (\lambda + \cos t, \sin t).$$

Solución. Está en los apuntes. Tenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}(\lambda, t) = (1, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\lambda, t) = (-\sin t, \cos t).$$

Entonces debe ser

$$0 = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) = \begin{vmatrix} 1 & -\sin t \\ 0 & \cos t \end{vmatrix} = \cos t.$$

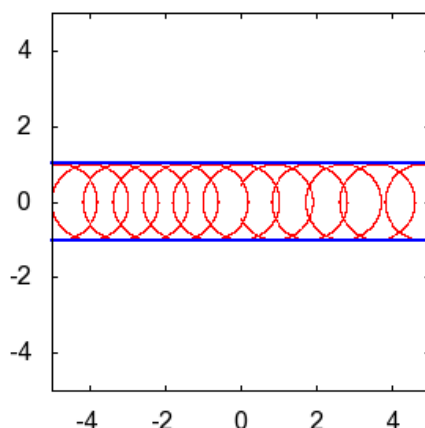
Esto implica

$$t = \frac{\pi}{2}, \quad t = \frac{3\pi}{2}.$$

Entonces vamos a tener dos envolventes, y sus ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1(\lambda) &= \mathbf{x}\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\lambda + \cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right) = (\lambda, 1), \\ \mathbf{e}_2(\lambda) &= \mathbf{x}\left(\lambda, \frac{3\pi}{2}\right) = \left(\lambda + \cos \frac{3\pi}{2}, \sin \frac{3\pi}{2}\right) = (\lambda, -1). \end{aligned}$$

Son dos rectas, paralelas al eje X , y de ecuación $y = 1, y = -1$, como se aprecia en la figura:



4. (1 punto) Determine si la superficie dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \cos(uv), \tan v) \quad u, v \in [0, 2\pi]$$

tiene una parametrización regular.

Solución: Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (\cos u, -v \sin(uv), 0), \\ \mathbf{x}_v &= (0, -u \sin(uv), 1 + \tan^2 v).\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= (\cos u, -v \sin(uv), 0) \times (0, -u \sin(uv), 1 + \tan^2 v) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u & -v \sin(uv) & 0 \\ 0 & -u \sin(uv) & 1 + \tan^2 v \end{vmatrix} \\ &= (-v \sin(uv)(1 + \tan^2 v), -\cos u(1 + \tan^2 v), -u \sin(uv) \cos u).\end{aligned}$$

Por ejemplo, como en $(u_0, v_0) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ se tiene que $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (0, 0, 0)$, la parametrización no es regular.

EJERCICIOS

5. (3 puntos) Sea C la la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (e^t, t^2 - 1, 2t + 1)$$

para $t \in [-2, 2]$.

- Estudie si es una curva regular.
- Determine el triedro de Frenet en $\mathbf{x}(0)$.
- Determine las ecuaciones del plano rectificante y de la recta binormal por $\mathbf{x}(0)$.

Solución:

- Para que sea regular, sus componentes debe ser funciones diferenciables y lo son, y además debe ser

$$\mathbf{x}'(t) = (e^t, 2t, 2) \neq (0, 0, 0).$$

Pero como la tercera componente siempre es distinta de 0, entonces es una curva regular.

b) Tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= (e^t, 2t, 2), \quad \mathbf{x}''(t) = (e^t, 2, 0), \quad \mathbf{x}'''(t) = (e^t, 0, 0), \\ \mathbf{x}'(0) &= (1, 0, 2), \quad \mathbf{x}''(0) = (1, 2, 0), \quad \mathbf{x}'''(0) = (1, 0, 0).\end{aligned}$$

El vector tangente unitario en $\mathbf{x}(0)$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(0) &= \frac{1}{\|(1, 0, 2)\|} (1, 0, 2) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} (1, 0, 2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 0, 2).\end{aligned}$$

Un vector con la misma dirección y sentido que el vector normal principal $\mathbf{n}$ es:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t) = ((1, 0, 2) \times (1, 2, 0)) \times (1, 0, 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \times (1, 0, 2) \\ &= (-4, 2, 2) \times (1, 0, 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4, 10, -2).\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(4, 10, -2)}{\sqrt{4^2 + 10^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{30}} (4, 10, -2) = \frac{1}{\sqrt{30}} (2, 5, -1).$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 0, 2) \times \frac{1}{\sqrt{30}} (2, 5, -1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt{6}} (-10, 5, 5) = \frac{1}{\sqrt{6}} (-2, 1, 1).\end{aligned}$$

Entonces el triedro de Frenet es

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 0, 2), \frac{1}{\sqrt{30}} (2, 5, -1), \frac{1}{\sqrt{6}} (-2, 1, 1) \right\}.$$

c) El plano rectificante es el plano perpendicular a la recta normal, es decir, pasa por $\mathbf{x}(0) = (1, -1, 1)$ y es perpendicular al vector normal. es decir, los puntos (x, y, z) verifican

$$\begin{aligned}0 &= ((x, y, z) - (1, -1, 1)) \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} (2, 5, -1) \iff \\ 0 &= (x - 1, y + 1, z - 1) \cdot (2, 5, -1) \iff 2x + 5y - z + 4 = 0.\end{aligned}$$

La recta binormal pedida pasa por $\mathbf{x}(0) = (1, -1, 1)$ y tiene la misma dirección que el vector binormal $\frac{1}{\sqrt{6}} (-2, 1, 1)$. Es decir, tiene por ecuación

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda (-2, 1, 1).$$

6. (3 puntos) Sea el cilindro dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Determinense los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en la la elipse dada por

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t + \sin t)$$

en el punto $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 1)$.

Solución:

Primero determinamos los vectores tangentes y normal al cilindro. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= (-\sin u, \cos u, 0), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

El vector normal a la superficie es

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(u, v) &= \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|} \\ &= \frac{(-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)}{\|(-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)\|} \\ &= (\cos u, \sin u, 0).\end{aligned}$$

Ahora estudiamos la curva. Para la elipse, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= (-\sin t, \cos t, -\sin t + \cos t), & \mathbf{x}'(0) &= (0, 1, 1), \\ \mathbf{x}''(t) &= (-\cos t, -\sin t, -\cos t - \sin t), & \mathbf{x}''(0) &= (-1, 0, -1).\end{aligned}$$

Sabemos que el vector $\mathbf{v} = (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0)$ tiene la misma dirección y sentido que el vector normal (y, por tanto, que el vector curvatura) y que el módulo del vector curvatura es

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Entonces, el vector $\mathbf{v}$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) \\ &= ((0, 1, 1) \times (-1, 0, -1)) \times (0, 1, 1) \\ &= (-1, -1, 1) \times (0, 1, 1) \\ &= (-2, 1, -1).\end{aligned}$$

El vector normal es

$$\mathbf{n}(0) = \frac{(-2, 1, -1)}{\|(-2, 1, -1)\|} = \frac{\sqrt{6}}{6}(-2, 1, -1).$$

Por otro lado, la curvatura es

$$\begin{aligned}k(t) &= \frac{\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\|}{\|\mathbf{x}'(0)\|^3} = \frac{\|(0, 1, 1) \times (-1, 0, -1)\|}{\|(0, 1, 1)\|^3} \\ &= \frac{\|(-1, -1, 1)\|}{\|(0, 1, 1)\|^3} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(0) &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{6}}{6} (-2, 1, -1) \\ &= \frac{1}{4} (-2, 1, -1) .\end{aligned}$$

Lo podemos escribir a partir de los vectores curvatura geodésica y curvatura normal, $\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)$, que están en los planos tangente a la superficie y en la recta normal. En $(1, 0, 1)$, tenemos

$$\begin{aligned}(1, 0, 1) &= \mathbf{x}(0, 1) , \\ \mathbf{x}_u(0, 1) &= (-\sin 0, \cos 0, 0) = (0, 1, 0) , \\ \mathbf{x}_v(0, 1) &= (0, 0, 1) , \\ \mathbf{N}(0, 1) &= (\cos 0, \sin 0, 0) = (1, 0, 0) .\end{aligned}$$

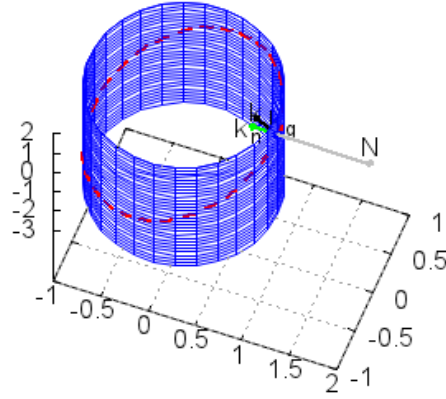
Entonces, como una base del espacio tangente es $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y una base de la recta normal es $(1, 0, 0)$, tenemos que

$$\frac{1}{4} (-2, 1, -1) = \frac{1}{4} (0, 1, -1) + \frac{-1}{2} (1, 0, 0) ,$$

donde

$$\mathbf{k}_g(0) = \frac{1}{4} (0, 1, -1) , \quad \mathbf{k}_n(0) = \frac{-1}{2} (1, 0, 0) .$$

En la siguiente figura se representan el cilindro, la elipse, los vectores curvatura (en azul), curvatura geodésica (en



Para determinar los vectores curvatura geodésica y curvatura normal no hemos parametrizado la curva por la longitud del arco, porque obtenemos una integral elíptica, que no tiene solución a partir de funciones elementales.



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Septiembre 2017. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$f(x, y) = (|x| + y, e^{xy}).$$

Estudie si la función f tiene derivadas parciales en el punto $(0, 0)$ y determínelas en caso de que existan.

Solución: Tenemos que f tiene dos componentes y podemos escribir

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)),$$

donde cada $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que determinar todas las derivadas parciales $D_j f_i$ para $i, j = 1, 2$. Como el valor absoluto no es derivable, para f_1 tenemos

$$\begin{aligned} D_1 f_1(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(t, 0) - f_1(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t| - 0}{t}, \\ D_2 f_1(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(0, t) - f_1(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - 0}{t} = 1. \end{aligned}$$

La primera de estas derivadas parciales no existe.

Para f_2 tenemos:

$$\begin{aligned} D_1 f_2(x, y) &= y e^{xy}, & D_1 f_2(0, 0) &= 0, \\ D_2 f_2(x, y) &= x e^{xy}, & D_2 f_2(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

2. Sea la curva definida por

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, e^{t^2})$$

si $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Estudie en qué puntos es regular.

Solución. No es regular en todos los puntos, porque su derivada es:

$$\mathbf{x}'(t) = (-\sin t, e^{t^2} + 2te^t).$$

Tenemos que $\sin t = 0$ si y sólo si $t = k\pi$ y

$$\mathbf{x}'(k\pi) = (-\sin k\pi, e^{k^2\pi} (k\pi)^2 + 2k\pi e^{k\pi}) = (0, k\pi e^{k\pi} (k\pi + 2)).$$

Cuando $k = 0$, entonces

$$\mathbf{x}'(k\pi) = 0$$

Para $k \neq 0$, tenemos

$$\mathbf{x}'(k\pi) = (0, k\pi e^{k\pi} (k\pi + 2)) \neq (0, 0).$$

3. (1 punto) Sea C la semicircunferencia centrada en $(0,0)$ y de radio r , definida por la ecuación, para $t \in [0, \pi]$, por

$$\mathbf{x}(t) = (r \cos t, r \sin t).$$

Determine su longitud de arco entre 0 y $t_0 \in (0, \pi/3)$.

Solución: Tenemos que

$$\mathbf{x}'(t) = (-r \sin t, r \cos t),$$

lo que implica que

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r.$$

Entonces

$$L = \int_0^{t_0} \|\mathbf{x}'(t)\| dt = \int_0^{t_0} r dt = rt|_0^{t_0} = rt_0.$$

4. (1 punto) Sea, para $t \in \mathbb{R}$,

$$\{\mathbf{x}(\lambda, t)\}_{\lambda \in [a, b]}$$

una familia de curvas dadas en ecuaciones paramétricas, donde para cada λ tenemos una curva regular. Defina su envolvente.

Solución: página 23 de los apuntes del tema 2. Es una curva que es en cada punto tangente a alguna curva de la familia y además, no está incluida en la familia de curvas.

EJERCICIOS

5. (3 puntos) Sea C la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$.

- Escribese su ecuación $\mathbf{x}(t)$, para $t \in [0, 1]$.
- Determine el triedro de Frenet de esta curva en el punto $\mathbf{x}(0)$.
- Determine la ecuación del plano rectificante en el punto $\mathbf{x}(0)$

Nota: cada apartado puntúa 1 punto.

Solución:

- El polígono de control es

$$\mathbf{b}_0 = (0, 1, 1), \mathbf{b}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{b}_2 = (0, -1, 0).$$

Entonces la curva de Bézier cumple

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{b}_i B_i^2(t),$$

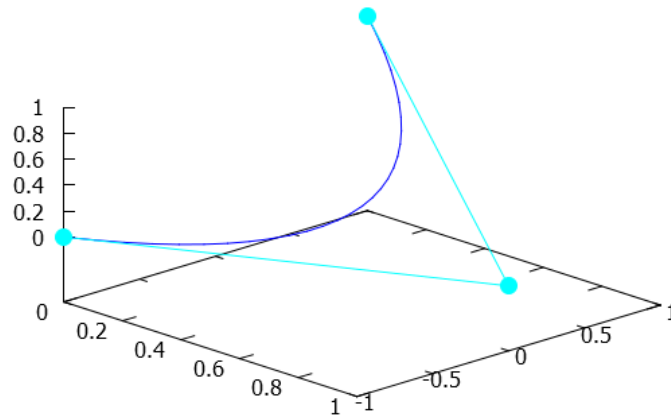
para los polinomios de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad B_i^2(t) = \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i}.$$

Entonces la curva de Bézier es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (0, 1, 1)B_0^2(t) + (1, 0, 0)B_1^2(t) + (0, -1, 0)B_2^2(t) \\ &= (0, 1, 1) \binom{2}{0} t^0 (1-t)^2 + (1, 0, 0) \binom{2}{1} t^1 (1-t)^1 + (0, -1, 0) \binom{2}{2} t^2 (1-t)^0 \\ &= (0, 1, 1)t^0 (1-t)^2 + (1, 0, 0)2t^1 (1-t)^1 + (0, -1, 0)t^2 (1-t)^0 \\ &= (2t(-t+1), -t^2 + (-t+1)^2, (-t+1)^2). \end{aligned}$$

La representación gráfica, con Maxima, de esta curva es



y se ha hecho con la sentencia

```
wxdraw3d(parametric(2*t*(1-t), -t^2+(1-t)^2, (1-t)^2, t, 0, 1), point_type=filled_circle,
point_size=2, color=cyan, points([0,1,1], [1,0,0], [0,-1,0]), view=[74,32]);
```

b) Para esta curva, $\mathbf{x}(t) = (2t(-t+1), -t^2 + (-t+1)^2, (-t+1)^2)$ y tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (2t(-t+1), -t^2 + (-t+1)^2, (-t+1)^2)$$

$$\mathbf{x}'(t) = (-4t + 2, -2, 2t - 2),$$

$$\mathbf{x}''(t) = (-4, 0, 2),$$

$$\mathbf{x}'(0) = (2, -2, -2), \quad \mathbf{x}''(0) = (-4, 0, 2),$$

$$\|\mathbf{x}'(0)\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4, 4, 8),$$

$$\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 8^2} = 4\sqrt{6}.$$

Con estos valores, sabemos que el vector

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) = ((2, -2, -2) \times (-4, 0, 2)) \times (2, -2, -2) \\ &= (-4, 4, -8) \times (2, -2, -2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 4 & -8 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-24, -24, 0) = -24(1, 1, 0) \end{aligned}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal $\mathbf{n}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{24(-1, -1, 0)}{24\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0).$$

El vector tangente unitario a la curva en $\mathbf{x}(0)$ es

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(0)}{\|\mathbf{x}'(0)\|} = \frac{(2, -2, -2)}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1).$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -1) \times (-1, -1, 0) \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1, 1, -23).\end{aligned}$$

Entonces el triedro de Frenet es

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0), \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1, 1, -23) \right\}.$$

- c) El plano rectificante es el plano perpendicular a la recta normal, es decir, pasa por $\mathbf{x}(0) = (0, 1, 1)$ y es perpendicular al vector normal. Es decir, los puntos (x, y, z) verifican

$$\begin{aligned}0 &= ((x, y, z) - (0, 1, 1)) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1) \iff \\ 0 &= (x, y - 1, z - 1) \cdot (1, -1, -1) \iff x - y - z + 2 = 0.\end{aligned}$$

6. Sea S la parte de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1 parametrizada por

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi),$$

para $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]$.

- Determine los coeficientes de la primera forma fundamental.
- Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.
- Determine el área de la región delimitada por las curvas coordenadas $\phi_0 = 0, \phi_1 = \frac{\pi}{2}$ y $\theta_0 = 0, \theta_1 = \frac{\pi}{2}$.
- A partir del valor anterior, razone y deduzca cuál es el área de la esfera.

Solución.

- a) Como

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi),$$

tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\theta(\theta, \phi) &= (-\sin \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \phi, 0), \\ \mathbf{x}_\phi(\theta, \phi) &= (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, -\sin \phi).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = (-\sin \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \phi, 0) \cdot (-\sin \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \phi, 0) = \sin^2 \phi, \\ F &= \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi = (-\sin \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \phi, 0) \cdot (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, -\sin \phi) = 0, \\ G &= \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi = (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, -\sin \phi) \cdot (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, -\sin \phi) = 1.\end{aligned}$$

- b) En un punto $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\theta\theta} &= (-\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta \sin \phi, 0), \quad \mathbf{x}_{\theta\phi} = (-\sin \theta \cos \phi, \cos \theta \cos \phi, 0), \\ \mathbf{x}_{\phi\phi} &= (-\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta \sin \phi, -\cos \phi).\end{aligned}$$

Tenemos que calcular el vector normal $\mathbf{n}$. El vector

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi &= (-\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \theta \operatorname{sen} \phi, 0) \times (\cos \theta \cos \phi, \operatorname{sen} \theta \cos \phi, -\operatorname{sen} \phi) \\ &= (-\cos \theta \operatorname{sen}^2 \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^2 \phi, -\cos \phi \operatorname{sen} \phi),\end{aligned}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal a la superficie. Además:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\| &= \sqrt{(-\cos \theta \operatorname{sen}^2 \phi)^2 + (-\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^2 \phi)^2 + (-\cos \phi \operatorname{sen} \phi)^2} \\ &= \operatorname{sen} \phi.\end{aligned}$$

Por eso:

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi}{\|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\|} = \frac{1}{\operatorname{sen} \phi} (-\cos \theta \operatorname{sen}^2 \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^2 \phi, -\cos \phi \operatorname{sen} \phi) \\ &= (-\cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, -\cos \phi).\end{aligned}$$

Ya podemos calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned}e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{\theta\theta} = (-\cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, -\cos \phi) \cdot (-\cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, 0) \\ &= \operatorname{sen}^2 \phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{\theta\phi} = (-\cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, -\cos \phi) \cdot (-\operatorname{sen} \theta \cos \phi, \cos \theta \cos \phi, 0) \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{\phi\phi} = (-\cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, -\cos \phi) \cdot (-\cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, -\cos \phi) \\ &= 1.\end{aligned}$$

c) Para determinar el área, calculamos primero:

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \phi} = \operatorname{sen} \phi,$$

Entonces, el área es:

$$\begin{aligned}A &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{EG - F^2} d\phi d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \phi d\phi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 \right) d\theta \\ &= 1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

d) La región que hemos considerado es $\frac{1}{4}$ de la semiesfera superior, es decir, es $\frac{1}{8}$ del área de la esfera. Entonces el área de la esfera es:

$$8A = 4\pi.$$

Podíamos haber hecho:

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} -\cos \phi \Big|_0^{\pi} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos \pi + \cos 0) d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2 \theta \Big|_0^{2\pi} = 4\pi.\end{aligned}$$



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Septiembre 2017. Modelo B

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Se tiene la función $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3 - y^5 - 1$. ¿Se puede expresar la variable x en función de y ?

Solución: Si consideramos la ecuación

$$f(x, y) = x^3 - y^5 - 1 = 0,$$

vemos que a variable x se puede expresar en función de la variable y como

$$x = \sqrt[3]{1 + y^5}.$$

Se puede hacer esto, porque el radicando siempre es mayor que 0.

2. (1 punto) Calcule el ángulo que forman los vectores tangentes a la curva $\mathbf{x}(t) = (e^t, t^2, 3t^2 - 1)$ con el vector $(0, 1, -1)$.
3. (1 punto) Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (t^2, \cos t, t^4 - 2t^2 + 2).$$

Determine la función curvatura y el radio de curvatura en $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$.

4. **Solución:** La curva no es regular en $(0, 0, 0)$ y además $\mathbf{x}(0) \neq (0, 0, 0)$.
5. (1 punto) Escriba las ecuaciones de Frenet para curvas en el espacio.

EJERCICIOS

6. (3 puntos) Sea la curva regular dada por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2 \cos t, \quad y(t) = t \sin^2 t.$$

- a) Determine sus puntos múltiples, si existen.
- b) Determine el vector tangente y el vector normal en un punto (x_0, y_0) .
- c) Determine la curvatura en un punto (x_0, y_0) .

7. (3 puntos) Sea S la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = (u^2 - v^2, u^2 + v^2, v)$$

en $D = (0, 2) \times (0, 2)$.

- a) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.
 b) Clasifique sus puntos.

Solución: hay que hacerla, he cambiado la superficie!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

- a) **Solución.** La aplicación $\mathbf{x}(u, v) = (u^2 - v^2, u^2 + v^2, u)$ es una parametrización de la superficie en un entorno de cada uno de sus puntos en $D \subset \mathbb{R}^2$. Comenzamos determinando las derivadas parciales de $\mathbf{x}(u, v)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= (2u, 2u, 0), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (-2v, 2v, 1).\end{aligned}$$

Los coeficientes e, f y g de la segunda forma fundamental se determinan a partir del vector normal unitario $\mathbf{n}$ y las derivadas segundas de $\mathbf{x}$. Empezamos con el vector normal normal unitario $\mathbf{n}$. Sabemos que el vector

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2u & 2u & 3u \\ -2v & 2v & 1 \end{vmatrix} = (2u, -2u, 8uv) = 2u(1, -1, 4v)$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal. Entonces: .

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| &= \sqrt{(-2v)^2(1^2 + 1^2 + (-4u)^2)} = 2v\sqrt{2 + 16u^2}, \\ \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{-2v(1, 1, -4u)}{2v\sqrt{2 + 16u^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 + 16u^2}}(-1, -1, 4u) \\ &= \left(\frac{-1}{\sqrt{2 + 16u^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2 + 16u^2}}, 4\frac{u}{\sqrt{2 + 16u^2}} \right).\end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas segundas:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= (2, 2, 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-2, 2, 0), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, 0).\end{aligned}$$

Entonces los coeficientes son:

$$\begin{aligned}e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{2 + 16u^2}}(-1, -1, 4u) \cdot (2, 2, 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 + 16u^2}}(-2 - 2) = -\frac{4}{\sqrt{2 + 16u^2}}, \\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{2 + 16u^2}}(-1, -1, 4u) \cdot (0, 0, 0) = 0, \\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{2 + 16u^2}}(-1, -1, 4u) \cdot (-2, 2, 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 + 16u^2}}(2 - 2) = 0.\end{aligned}$$

- b) Ya podemos clasificar los puntos:

$$eg - f^2 = -\frac{4}{\sqrt{2 + 16u^2}} \cdot 0 - 0^2 = 0.$$

Como $e \neq 0$ pero $eg - f^2 = 0$, todos los puntos son parabólicos, por lo que es parabólico.

- c) La superficie se representa en la siguiente gráfica:



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Septiembre 2016. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida como

$$f(x, y) = (x - y^2, x^2 - y).$$

¿Tiene inversa local diferenciable en un entorno de $(0, 1)$?

Solución: Comprobamos que cumple las condiciones del teorema de la función inversa en $(0, 1)$. Como cada una de las componentes son infinitamente derivables, f es una función de clase infinito. El determinante de la matriz jacobiana en un punto (x, y) es

$$\det f'(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & -2y \\ 2x & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-2y)2x = 4xy - 1.$$

Podemos asegurar, por el teorema de la función inversa, que f tiene inversa local en un entorno de cada punto en donde este determinante es distinto de 0. Como en $(0, 1)$ es distinto de 0, podemos afirmar que f tiene inversa local diferenciable en un entorno de $(0, 1)$.

2. (1 PUNTO) Sea C la curva dada por la intersección de las superficies $z = x^2 + y$, $x - z = 2$. Determine la ecuación de su plano osculador en el punto $(4, 0, 2)$.

Solución: Es una curva plana (está contenida en el plano $x - z = -2$), y por eso, su plano osculador es este mismo plano: $x - z = 2$.

3. (1 PUNTO) Sea C una curva parametrizada por la longitud de arco y ecuación dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$, que está contenida en una superficie. Sea $\mathbf{k}(s)$ el vector curvatura de la curva. Defina, a partir de él, vector curvatura normal $\mathbf{k}_n(s)$ y vector curvatura geodésica $\mathbf{k}_g(s)$.

Solución: Podemos descomponer el vector curvatura $\mathbf{k}(s)$ como suma de dos vectores, uno tangente a la superficie (contenido en el espacio tangente a la superficie en cada punto) y otro perpendicular a ella, o que está en la recta normal a la superficie. El vector contenido en el espacio tangente es el vector curvatura geodésica $\mathbf{k}_g(s)$ y el vector contenido en la recta normal es el vector curvatura normal $\mathbf{k}_n(s)$.

4. (1 PUNTO) Considere el toro dado por la siguiente ecuación paramétrica.

$$\mathbf{x}(u, v) = ((\cos u + 2) \cos v, (\cos u + 2) \sin v, \sin u).$$

Clasificar el punto $(2, 0, 1) = \mathbf{x}(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Solución: Determinamos los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u, v) &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), & \mathbf{x}_u\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) &= (-1, 0, 0); \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= -(\cos u + 2) \sin v, (\cos u + 2) \cos v, 0, & \mathbf{x}_v\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) &= (0, 2, 0). \end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{x}_u\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \times \mathbf{x}_v\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -2)$ y, por tanto, $N\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (0, 0, -1)$ es normal a la superficie en $(2, 0, 1)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu}(u, v) &= (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u), & \mathbf{x}_{uu}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) &= (0, 0, -1); \\ \mathbf{x}_{uv}(u, v) &= (\sin u \sin v, -\sin u \cos v, 0), & \mathbf{x}_{uv}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) &= (0, -1, 0); \\ \mathbf{x}_{vv}(u, v) &= -(\cos u + 2) \cos v, -(\cos u + 2) \sin v, 0, & \mathbf{x}_{vv}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) &= (-2, 0, 0). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{x}_{uu}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \cdot N\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (0, 0, -1) \cdot (0, 0, -1) = 1; \\ f &= \mathbf{x}_{uv}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \cdot N\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (0, -1, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0; \\ g &= \mathbf{x}_{vv}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \cdot N\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (-2, 0, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0. \end{aligned}$$

Así,

$$eg - f^2 = 0.$$

Por tanto, el punto $(2, 0, 1)$ es parabólico en el toro dado.

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Sea C la curva dada por la ecuación paramétrica:

$$\mathbf{x}(t) = 2e^t(\cos t, \sin t),$$

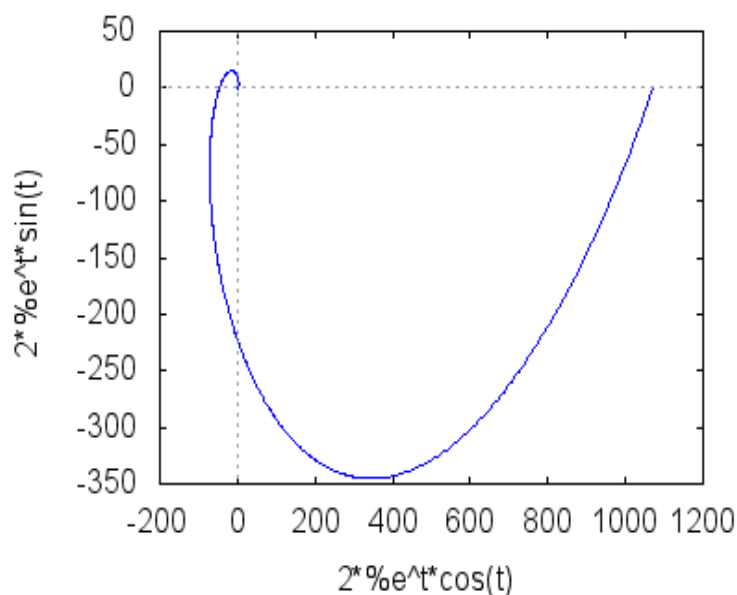
para $t \in \mathbb{R}$. Es una espiral logarítmica.

- Obtenga la longitud de arco partiendo de $t = 0$.
- Parametrícese por la longitud de arco.
- Obtégase la curvatura en el punto $\mathbf{x}(0)$.

Nota: Cada apartado vale 1 punto.

Solución:

- La gráfica de la función es



Se ha representado en Maxima con la sentencias: `wxplot2d([[ 'parametric, 2*exp(t)*cos(t), 2*exp(t), -10, 2*%pi], [nticks, 300]])`\$

Sabemos que la longitud de arco es:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\mathbf{x}'(t)\| dt = \int_0^t 2e^t \sqrt{1+1} dt = 2\sqrt{2}e^t \Big|_0^t \\ &= 2\sqrt{2}e^t - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(b) A partir de esta expresión, podemos parametrizar por la longitud de arco. Tenemos:

$$s = 2\sqrt{2}e^t - 2\sqrt{2}.$$

Tenemos el cambio de variable que debemos aplicar:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}e^t &= s + 2\sqrt{2} \implies e^t = \frac{s}{2\sqrt{2}} + 1 \\ \implies t &= \ln \left(\frac{s}{2\sqrt{2}} + 1 \right). \end{aligned}$$

Así, la espiral logarítmica parametrizada por la longitud de arco es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) &= \mathbf{x}(t(s)) = 2e^{\ln(\frac{s}{2\sqrt{2}}+1)} \left(\cos \left(\ln \left(\frac{s}{2\sqrt{2}} + 1 \right) \right), \sin \left(\ln \left(\frac{s}{2\sqrt{2}} + 1 \right) \right) \right) \\ &= 2 \left(\frac{s}{2\sqrt{2}} + 1 \right) \left(\cos \left(\ln \left(\frac{s}{2\sqrt{2}} + 1 \right) \right), \sin \left(\ln \left(\frac{s}{2\sqrt{2}} + 1 \right) \right) \right). \end{aligned}$$

(c) Como la curva está parametrizada por la longitud de arco, entonces el vector curvatura es $\mathbf{x}''(s)$ y la curvatura es su módulo.

Para esta curva, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(s) &= 2 \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} \cos \left(\ln \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}s + 1 \right) \right) - \frac{1}{4}\sqrt{2} \sin \left(\ln \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}s + 1 \right) \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4}\sqrt{2} \cos \left(\ln \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}s + 1 \right) \right) + \frac{1}{4}\sqrt{2} \sin \left(\ln \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}s + 1 \right) \right) \right), \\ \mathbf{x}''(s) &= 2 \left(-\frac{1}{8} \frac{\cos(\ln(\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1))}{\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1} - \frac{1}{8} \frac{\sin(\ln(\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1))}{\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1}, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{8} \frac{\cos(\ln(\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1))}{\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1} - \frac{1}{8} \frac{\sin(\ln(\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1))}{\frac{1}{4}\sqrt{2}s+1} \right). \end{aligned}$$

Nos pide la curvatura en $s = 0$, por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''(0) &= 2 \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right), \\ \|\mathbf{x}''(0)\| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vemos que estos cálculos son laboriosos. Podíamos haber partido de la expresión de la curva no parametrizada por la longitud de arco, y aplicar

$$k(t) = \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

En esta curva, es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= 2e^t(\cos t - \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + \cos t), \quad \mathbf{x}'(0) = (2, 2), \\ \|\mathbf{x}'(0)\| &= \sqrt{8}, \\ \mathbf{x}''(t) &= (-4e^t \operatorname{sen} t, 4e^t \cos t), \quad \mathbf{x}''(0) = (0, 4) \\ k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}^3} = \frac{1}{4}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

6. (3 PUNTOS) Sea C la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(0, 1, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(1, 0, 2)$, $(0, -1, 2)$.

- (a) Escribase su ecuación $\mathbf{x}(t)$, para $t \in [0, 1]$.
- (b) Determine la curvatura en el punto correspondiente a $t = 1$ partiendo de esta parametrización de la curva.
- (c) Determine la recta normal principal en el punto correspondiente a $t = 1$ partiendo de esta parametrización de la curva.

Nota: Cada apartado vale 1 punto.

Solución:

- (a) El polígono es

$$\mathbf{b}_0 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{b}_1 = (1, 2, 0), \quad \mathbf{b}_2 = (1, 0, 2), \quad \mathbf{b}_3 = (0, -1, 2).$$

Entonces la curva de Bézier cumple

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i B_i^3(t),$$

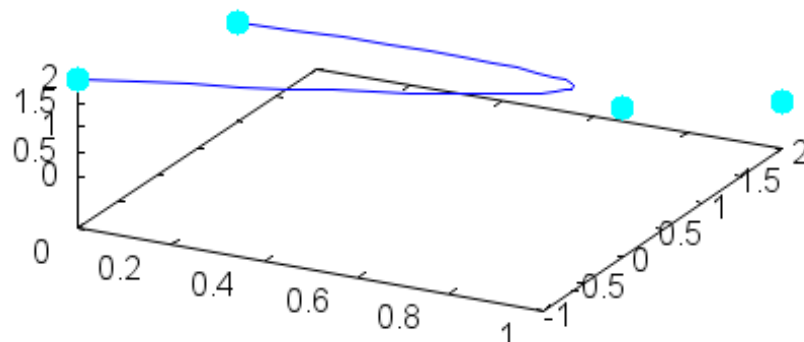
para los polinomios de Bernstein

$$B_i^3(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}.$$

Entonces la curva de Bézier es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= (0, 1, 1)B_0^3(t) + (1, 2, 0)B_1^3(t) + (1, 0, 2)B_2^3(t) + (0, -1, 2)B_3^3(t) \\ &= (0, 1, 1) \binom{3}{0} t^0 (1-t)^3 + (1, 2, 0) \binom{3}{1} t^1 (1-t)^2 + (1, 0, 2) \binom{3}{2} t^2 (1-t) \\ &\quad + (0, -1, 2) \binom{3}{3} t^3 (1-t)^0 \\ &= (0, 1, 1) (1-t)^3 + 3(1, 2, 0)t(1-t)^2 + 3(1, 0, 2)t^2(1-t) + (0, -1, 2)t^3 \\ &= (3t(-t+1)^2 + 3t^2(-t+1), -t^3 + (-t+1)^3 + 6t(-t+1)^2, 2t^3 + (-t+1)^3 + 6t^2(-t+1)) \\ &= (3t - 3t^2, 4t^3 - 9t^2 + 3t + 1, -5t^3 + 9t^2 - 3t + 1).\end{aligned}$$

La representación gráfica, con **Maxima**, de esta curva es



y se ha hecho con la sentencia `wxdraw3d(parametric(3*t-3*t^2,4*t^3-9*t^2+3*t+1,-5*t^3+9*t^2-3*t,0,1), point_type=filled_circle, point_size=2, color=cyan,points(control),view=[40,2`

(b) Para determinar la curvatura $k(t)$ partimos de:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Para esta curva, $\mathbf{x}(t) = (3t - 3t^2, 4t^3 - 9t^2 + 3t + 1, -5t^3 + 9t^2 - 3t + 1)$ y tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = (-6t + 3, -18t + 12t^2 + 3, 18t - 15t^2 - 3),$$

$$\mathbf{x}''(t) = (-6, 24t - 18, -30t + 18),$$

$$\mathbf{x}'(1) = (-3, -3, 0), \quad \mathbf{x}''(1) = (-6, 6, -12),$$

$$\|\mathbf{x}'(1)\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & -12 \end{vmatrix} = (36, -36, -36),$$

$$\|\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)\| = \sqrt{36^2 + (-36)^2 + (-36)^2} = 36\sqrt{3}.$$

Entonces

$$k(1) = \frac{36\sqrt{3}}{(3\sqrt{2})^3} = \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}.$$

(c) El vector normal principal tiene la misma dirección y sentido que

$$(\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)) \times \mathbf{x}'(1).$$

En este caso, es

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)) \times \mathbf{x}'(1) &= (36, -36, -36) \times (-3, -3, 0) = (-108, 108, -216) \\ &= 108(-1, 1, -2). \end{aligned}$$

Por tanto, la recta normal en $\mathbf{x}(1)$ es la recta que pasa por $\mathbf{x}(1) = (0, 1, 2) = \mathbf{b}_3$ y tiene por vector director a $(-1, -1, -2)$:

$$\alpha(\lambda) = (0, -1, 2) + \lambda(-1, 1, -2).$$